Rémy.

Université Paul Sabatier
L1 PCP

Année universitaire 2010-2011
Lundi 7 février 2011

Durée 45 minutes
L'usage des calculatrices est interdit

Nom : **Prénom :** **Note :** /20

2

1. Soient le repère orthonormé cartésien $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ associé à la base $\mathcal{B}$ et le repère cylindrique $\mathcal{R}_{cyl}(O, \mathcal{B}_{cyl})$ associé à la base orthonormée $\mathcal{B}_{cyl}(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$. Un point M est mobile par rapport au référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Sa position est repérée par les coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou par les coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) suivant la base choisie.

   (a) Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathcal{B}$.

   1 $\quad \overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ ou $\overrightarrow{OM} = \left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right._{\mathcal{B}}$

   (b) Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathcal{B}_{cyl}$.

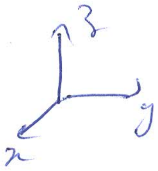
   1 $\quad \overrightarrow{OM} = \rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z}$ ou $\overrightarrow{OM} = \left|\begin{matrix} \rho \\ 0 \\ z \end{matrix}\right._{\mathcal{B}_{cyl}}$

   2 (c) Calculer la vitesse du point M par rapport au référentiel cartésien $\mathcal{R}$: $\left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{\mathcal{R}}$. Exprimer le résultat dans $\mathcal{B}$ et dans $\mathcal{B}_{cyl}$.

dans $\mathcal{B}$: $\vec{v}(M/R) = \left|\begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{matrix}\right.$ 1

dans $\mathcal{B}_{cyl}$ $\vec{v}(M/R) = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \dot{z}\vec{e_z} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$

$= \left|\begin{matrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{matrix}\right.$ 1



4

(d) Calculer la vitesse du point M par rapport au référentiel cylindrique $\mathcal{R}_{cyl}$: $\left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{\mathcal{R}_{cyl}}$.
Exprimer le résultat dans $\mathcal{B}$ et dans $\mathcal{B}_{cyl}$.

dans B : $\vec{v}(M/R_{cyl}) = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z} + \vec{\Omega}(R/R_{cyl}) \wedge (\vec{e_x}\, x + y\,\vec{e_y} + z\,\vec{e_z})$ 0,5 0,5

or, $\vec{\Omega}(R/R_{cyl}) = -\dot{\varphi}\,\vec{e_z}$ 1 d'où

$\vec{v}(M/R_{cyl}) = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z} - x\dot{\varphi}\,\vec{e_y} + y\dot{\varphi}\,\vec{e_x}$ 1

$= \left| \begin{array}{l} \dot{x} + y\dot{\varphi} \\ \dot{y} - x\dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{array} \right.$

dans Bcyl $\vec{v}(M/R_{cyl}) = \left| \begin{array}{l} \dot{\rho} \\ 0 \\ \dot{z} \end{array} \right.$ 1 2

Questions de cours

2

Soient deux repères $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$. $\mathcal{R}'$ est en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ suivant un mouvement de translation défini par $\vec{v}(O'/\mathcal{R})$ et un mouvement de rotation défini par $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$. On étudie le mouvement d'un point M dont les coordonnées sont (x', y', z') dans $\mathcal{R}'$ et (x, y, z) dans $\mathcal{R}$.

2. Donner la définition de la vitesse du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$ puis dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

$\vec{v}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$ 1 et $\vec{v}(M/R') = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R'}$ 1

(2)

3. Établir la relation entre $\vec{v}(M/\mathcal{R})$, $\left[\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right]_{\mathcal{R}}$ et $\vec{v}(O'/\mathcal{R})$.

$$\vec{v}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\Big|_R + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\Big|_R = \vec{v}(O'/R) + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\Big|_R$$

1 1

(3)

4. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{O'M}$ dans $\mathcal{R}'$, puis calculer $\left[\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right]_{\mathcal{R}}$ en fonction de $\vec{v}(M/\mathcal{R}')$, $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ et $\overrightarrow{O'M}$.

- $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{e_{x'}} + y'\vec{e_{y'}} + z'\vec{e_{z'}}$ 1
- $\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\Big|_{R} = \underbrace{\dot{x}'\vec{e_{x'}} + \dot{y}'\vec{e_{y'}} + \dot{z}'\vec{e_{z'}}} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge (x'\vec{e_{x'}} + y'\vec{e_{y'}} + z'\vec{e_{z'}})$ 1

$$\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\Big|_R = \vec{v}(M/R') + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M}$$

1

(1)

5. En déduire la loi de composition des vitesses qui lie $\vec{v}(M/\mathcal{R})$, $\vec{v}(M/\mathcal{R}')$, $\vec{v}(O'/\mathcal{R})$, $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ et $\overrightarrow{O'M}$

$$\vec{v}(M/R) = \vec{v}(O'/R) + \vec{v}(M/R') + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M}.$$

1

2.5

6. Énoncer, sans démonstration, la définition de l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e(M, \mathcal{R}'/\mathcal{R})$ d'un point M par rapport à $\mathcal{R}$.

$$\vec{a_e}(M, R'/R) = \vec{a}(O' \in R'/R) + \left[\frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt}\right]_R \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \left[\vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{O'M}\right]$$

0,5 1 1

1.5

7. Énoncer, sans démonstration, la définition de l'accélération de Coriolis $\vec{a}_c(M, \mathcal{R}'/\mathcal{R})$ d'un point M par rapport à $\mathcal{R}$.

$$\vec{a_c}(M, R'/R) = 2\vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{v}(M/R').$$

1,5

(10').

↳ sujet trop court...